УМФ. Определения и формулировки

Васильченко Д.Д., 306

18 марта 2024 г.

1 Уравнение теплопроводности

1.1 Классификация УРЧП

Def 1. Уравнение в частных производных 2-го порядка:

$$F(x, y, u(x, y), u_x(x, y), u_y(x, y), u_{xx}(x, y), u_{xy}(x, y), u_{yy}(x, y)) = 0$$

Def 2. Квазилинейное уравнение в частных производных 2-го порядка:

$$a_{11}(x, y, u(x, y), u_x(x, y), u_y(x, y))u_{xx} + 2a_{12}(x, y, u(x, y), u_x(x, y), u_y(x, y))u_{xy} +$$

$$+a_{22}(x, y, u(x, y), u_x(x, y), u_y(x, y))u_{yy} + f(x, y, u(x, y), u_x(x, y), u_y(x, y)) = 0$$

Def 3. Линейное уравнение в частных производных 2-го порядка:

$$a_{11}(x, y)u_{xx} + 2a_{12}(x, y) + a_{22}(x, y) + f(x, y, u(x, y), u_x(x, y), u_y(x, y)) = 0$$

Def 4. Линейное УРЧП 2-порядка в точке (x_0, y_0) называется:

1. гиперболическим, если $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$
2. эллиптическим, если $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$
3. параболическим, если $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$

1.2 Одномерное уравнение теплопроводности и задачи для него

Уравнение в полуполосе с граничными условиями первого рода:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t),\ 0 < x < l, t > 0 \\ u(x, 0) = \phi(x), 0 \leq x \leq l \\ u(0, t) = \nu_1(t), 0 \leq t \\ u(l, t) = \nu_2(t), 0 \leq t \end{cases}$$

Уравнение в полуполосе с граничными условиями второго рода:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t),\ 0 < x < l, t > 0 \\ u(x,0) = \phi(x), 0 \le x \le l \\ u_x(0,t) = \nu_1(t), 0 \le t \\ u_x(l,t) = \nu_2(t), 0 \le t \end{cases}$$

Уравнение на полупрямой:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t),\ 0 < x, t > 0 \\ u(x,0) = \phi(x), 0 \le x \\ u(0,t) = \nu_1(t), 0 \le t \end{cases}$$

Уравнение на прямой

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t),\ x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = \phi(x), x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

1.3 Простейшая начально-краевая задача

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx},\ 0 < x < l, 0 < t \le \overline{T}(1) \\ u(x,0) = \phi(x), 0 \le x \le l(2) \\ u(0,t) = 0, 0 \le t \le \overline{T}(3) \\ u(l,t) = 0, 0 \le t \le \overline{T}(4) \end{cases}$$

Область, в которой рассматривается задача: $Q_{lT} = \{(x,t) :\ 0 < x < l, 0 < t \le \overline{T}\}$

Def 5. Функция $u(x,t)$ называется решением задачи (1) -(4), если $u(x,t) \in C^{2,1}(Q_{lT}), u(x,t) \in C(\overline{Q}_{lT})$ и удовлетворяет (1)-(4).

Решение методом Фурье:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{l} \int\limits_0^l \phi(s) \sin\frac{\pi n}{l} s ds \right) \sin\frac{\pi n}{l} x e^{-a^2 (\frac{\pi n}{l})^2 t}$$

St 1. *Вспомогательные утверждения:*

1. $f(x) \in C[0,l],\ f(0) = f(l) = 0,\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n \sin\frac{\pi n}{l} x,\ f_n = \frac{2}{l} \int\limits_0^l f(x) \sin\frac{\pi n}{l} x dx$ *- сходится равномерно на [0,l]* $\Rightarrow f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n \sin\frac{\pi n}{l} x$

2. $f(x) \in C[0,l] \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^2 \le const$

3. $f(x) \in C[0,l] \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \hat{f}_n^2 \le const,\ \hat{f}_n = \frac{2}{l} \int\limits_0^l f(x) \cos\frac{\pi n}{l} x dx$

Th 1. *(Существование решения)*
Если $\phi(x) \in C^1[0,l]$ *и* $\phi(0) = \phi(l) = 0$, *то функция* $u(x,t)$, *полученная методом Фурье является решением задачи (1)-(4)*

Th 2. *(Принцип максимума)*
Пусть $u(x,t) \in C^{2,1}(Q_{l,T}) \cap C(\overline{Q_{l,T}})$ *и* $u_t = a^2 u_{xx}$, *тогда* $\max\limits_{\Gamma} u(x,t) = \max\limits_{\overline{Q_{l,T}}} u(x,t), \min\limits_{\Gamma} u(x,t) = \min\limits_{\overline{Q_{l,T}}} u(x,t)$

St 2. *(Единственность)*
Пусть $u_i(x,t) \in C^{2,1}(Q_{l,T}) \cap C(\overline{Q_{l,T}})$ *и* u_i *удовлетворяет:*

$$\begin{cases} (u_i)_t = a^2 (u_i)_{xx},\ 0 < x < l, 0 < t \le \overline{T} \\ u_i(x,0) = \phi(x), 0 \le x \le l \\ u_i(0,t) = \nu_1(t), 0 \le t \le \overline{T} \\ u_i(l,t) = \nu_2(t), 0 \le t \le \overline{T} \end{cases}$$

тогда $u_1(x,t) = u_2(x,t), \forall (x,t) \in \overline{Q}_{l,T}$

St 3. *(Позитивность)*
Пусть $u_i(x,t) \in C^{2,1}(Q_{l,T}) \cap C(\overline{Q_{l,T}})$ *и* u_i *удовлетворяет* $(u_i)_t = a^2 (u_i)_{xx}$ *в* $Q_{l,T}$, *тогда если* $u_1(x,t) \ge u_2(x,t), \forall (x,t) \in \Gamma$, *то* $u_1(x,t) \ge u_2(x,t), \forall (x,t) \in \overline{Q}_{l,T}$

St 4. *(Устойчивость)*
Пусть $u_i(x,t) \in C^{2,1}(Q_{l,T}) \cap C(\overline{Q_{l,T}})$ *и* u_i *удовлетворяет*

$$\begin{cases} (u_i)_t = a^2 (u_i)_{xx},\ 0 < x < l, 0 < t \le \overline{T} \\ u_i(x,0) = \phi_i(x), 0 \le x \le l \\ u_i(0,t) = \nu_{1i}(t), 0 \le t \le \overline{T} \\ u_i(l,t) = \nu_{2i}(t), 0 \le t \le \overline{T} \end{cases}$$

тогда $|u_1(x,t) - u_2(x,t)| \le \max\left(\max\limits_{[0,T]} |\nu_{11} - \nu_{12}|, \max\limits_{[0,T]} |\nu_{21} - \nu_{22}|, \max\limits_{[0,l]} |\phi_1 - \phi_2|\right)$

1.4 Единственность в общем случае

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t),\ 0 < x < l, t > 0 (1) \\ u(x,0) = \phi(x), 0 \le x \le l (2) \\ \alpha_1 u(0,t) - \beta_1 u_x(0,t) = \nu_1(t), 0 \le t (3) \\ \alpha_2 u(l,t) + \beta_2 u_x(l,t) = \nu_2(t), 0 \le t (4) \end{cases}$$

$\alpha_i, \beta_i \ge 0,\ \alpha_i + \beta_i > 0$

Th 3. *(Единственность)*
Пусть $u_i(x,t) \in C^{2,1}(Q_{l,T}) \cap C(\overline{Q_{l,T}})$ *и дополнительно* $\dfrac{\partial u_i}{\partial x} \in C(\overline{Q_{l,T}})$ *и* u_i *удовлетворяет (1)-(4), тогда* $u_1(x,t) = u_2(x,t), \forall (x,t) \in \overline{Q_{l,T}}$

1.5 Преобразования Фурье

Def 6. Пусть $f(x)$ кусочно гладкая и $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx < \infty$ (конечный), тогда преобразованием Фурье для $f(x)$ называется: $F(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi}dx$.

Обратное преобразование Фурье: $f(x) = \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\xi)e^{ix\xi}d\xi$

Лемма 1. *(Свойства ПФ)*

1. *При сделаных предположениях на* $f(x)$. $F(\xi)$ *определена на* $\xi \in \mathbb{R}$ *и* $|F(\xi)| = |\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi}dx| \leq \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx$
2. $F(\xi)$ *непрерывна по* ξ
3. $F(\xi) \to 0$, *при* $\xi \to \infty$
4. *ИНтеграл в обратном ПФ следует понимать в смысле главного значения* $f(x) = \dfrac{1}{2\pi}\lim\limits_{a\to\infty}\int\limits_{-a}^{a} F(\xi)e^{i\xi x}d\xi$

Лемма 2. *Пусть* $f(x) \in C(\mathbb{R}))$ *и* $|f(x)| \to 0$, *при* $|x| \to \infty$, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx$, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f'(x)|dx$ *- конечны, тогда* $f(x) \leftrightarrow F(\xi) \Rightarrow f'(x) \leftrightarrow i\xi F(\xi)$

Следствие 1. *Пусть* $f(x) \in C^m(\mathbb{R})$, $|f^{(k)}(x)| \to 0$, *при* $|x| \to \infty$ *и* $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f^{(k)}(x)|dx$ *- конечный,* $k = 0, m$, *тогда* $f(x) \leftrightarrow F(\xi) \Rightarrow f^{(m)}(x) \leftrightarrow (i\xi)^m F(\xi)$

Важные интегралы:

1. Интеграл Эйлера-Пуассона: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$
2. Интеграл типа Эйлера-Пуассона: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}\cos\beta x dx = \sqrt{\dfrac{\pi}{\alpha}}e^{-\dfrac{\beta^2}{4\alpha}}$

1.6 Уравнение теплопроводности на прямой

Формула Пуассона для решения

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}\ x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = \phi(x), x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$u(x,y) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\dfrac{-(x-s)^2}{4a^2 t}}\phi(s)dx \qquad (P)$$

Th 4. *Пусть* $\phi \in C(\mathbb{R})$ *и* $|phi(x)| \leq M$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $M = const$. *Определим для* $\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty)$ *функцию* $u(x,t)$ *через формулу (P), тогда*

1. $u \in C^{\infty}(\mathbb{R} \times (0, +\infty))$
2. $u(x,t)$ *удовлевторяет уравнению теплопроводнсти* $u_t = a^2 u_{xx}$ *при* $(x,t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty)$
3. $u(x,t) \to \phi(x_0)$ *при* $(x,t) \to (x_0, 0), \forall x_0 \in \mathbb{R}$, *т.е.* $\forall x_0 \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon, x_0) > 0 :\ |x - x_0| < \delta\ 0 < t < \delta \Rightarrow |u(x,t) - \phi(x_0)| < \varepsilon$

Def 7. Функция $p_a(x,t) = \dfrac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} e^{\frac{-x^2}{4a^2 t}}$ называется функцией мгновенного источника тепла или фундаментальным решением УТ.

Th 5. *(усиленное сохранение позитивности)*
Пусть $\phi \in C(\mathbb{R})$ *или кусочно непрерывна* $0 \leq \phi(x) \leq M$, $M = const$, $\phi(x) \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}$. *Определим* $u(x,t)$ *по формулам (P), тогда* $u(x,t) > 0$ *при* $\forall (x,t), t > 0$

Следствие 2. *Предыдущая теорема указывает на эффект мгновенного распространения тепла: если где-то при t=0 было нагрето, то при t> 0 температура тела везде > 0, т.е. скорость распространения тепла бесконечна.*

Th 6. *(сохранение ограниченности)*
Пусть $\phi \in C(\mathbb{R})$ *или кусочно непрерывна на* $\mathbb{R}$ $|\phi(x)| \leq M$, $\forall x \in \mathbb{R}, M = const$. *Определим* $u(x,t)$ *по формулам (P), тогда* $|u(x,t)| \leq M$ *всюду при* $t > 0$.

Th 7. *(принцип эксремума для УТ в полосе)*
Пусть $u(x,t)$ *- решение* $u_t = a^2 u_{xx}$ *из класса* $C^{2,1}(\mathbb{R} \times (0,T]) \cap C(\mathbb{R} \times [0,T])$, *ограничено в полуполосе* $\mathbb{R} \times [0,T]$, *тогда* $\inf\limits_{\mathbb{R}}(u(x,0)) \leq u(x,t) \leq \sup\limits_{\mathbb{R}}(u(x,0))$ *всюду в* $\mathbb{R} \times [0,T]$

1.7 Свертка

Def 8. Пусть f_1, f_2 - кусочно непрерывные и ограниченные на $\mathbb{R}$ функции, причём $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f_i| dx < \infty, i = 1, 2$, тогда свертка для f_1, f_2: $g(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(x - s) f_2(x) ds, \forall x \in \mathbb{R}$ (обозначение $g = (f_1 * f_2)(x))$).

Лемма 3. *(Основное свойство свертки)*
Пусть $f_1(x) \leftrightarrow F_1(\xi), f_2(x) \leftrightarrow F_2(\xi) \Rightarrow (f_1 * f_2) \leftrightarrow F_1(\xi) F_2(\xi)$

2 Уравнение Лапласа

Def 9. Функция u называется гармонической в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, если $\Delta u = 0$ всюду в Ω.

Внутренняя задача Дирихле: Пусть $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $\phi \in C(\partial\Omega)$, область Ω ограничена, тогда Задача Дирихле:

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, x \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = \phi \end{cases}$$

Внешняя задача Дирихле: Пусть $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $\phi \in C(\partial\Omega)$, область $\Omega = \mathbb{R}^n\ \overline{D}$, D - ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, тогда Задача Дирихле:

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, x \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = \phi \end{cases}$$

Тогда добавляется условие регулярности:

1. если n = 2, то $u(x) = \underline{O}(1), x \to \infty$
2. если $n \geq 3$, то $u(x) = \overline{O}(1), x \to \infty$

Th 8. *Пусть $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, Ω - ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $\Delta u = 0$, тогда $m = \min\limits_{\partial\Omega} u, M = \max\limits_{\partial\Omega} u \Rightarrow m \leq u(x) \leq M, \forall x \in \overline{\Omega}$*

Следствие 3. *(принцип позитивности)*
Пусть $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, Ω - ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, u - решение внутренней задачи Дирихле с ϕ и $\phi \geq 0, \forall x \in \partial\Omega$, тогда $u \geq 0, \forall x \in \overline{\Omega}$

Следствие 4. *(единственность решения)*
Внутренняя задача Дирихле не может иметь больше одного решения при заданном $\phi \in C(\partial\Omega)$.

Следствие 5. *(устойчивость решения)*
Пусть u_1, u_2 - решения внутренних задач Дирихле с функциями $\phi_1, \phi_2 \in C(\partial\Omega)$ и $|\phi_1 - \phi_2| < \varepsilon, \forall x \in \partial\Omega$, тогда $|u_1 - u_2| < \varepsilon, \forall x \in \overline{\Omega}$

2.1 Элементы векторного анализа

Def 10. $u \in C^k(\overline{\Omega})$, если в Ω существует все частные производные порядков $\leq k$ и эти частные производные непрерывно продолжаются на границы.

Def 11. Производная по направлению $\nu = \{\nu_1, \dots, \nu_n\}$: $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \dfrac{\partial}{\partial s} u(x + s\nu)|_{s=0} = \nu_1 \dfrac{\partial u}{\partial x_1} + \dots + \nu_n \dfrac{\partial u}{\partial x_n} = (\nu, \nabla u)$

Формула Остроградского-Гаусса: Пусть Ω - хорошая(гладкая, кусочно гладкая граница) область, $A \in C^1(\Omega)$, тогда

$$\int\limits_{\partial\Omega} (A, \nu_y) ds_y = \int\limits_{\Omega} div(A) dx,$$

здесь $A(x) = \{A_1(x), \ldots, A_n(x)\}$ - векторное поле.
$\Omega \in (GO)$ значит, что в области Ω для любой $A \in C^1(\overline{\Omega})$ справедлива формула Остроградского-Гаусса.

Th 9. *(Гаусса)*
Пусть $u \in C^2(\overline{\Omega})$, *тогда* $\nabla u \in C^1(\overline{\Omega})$, $\Omega \in (GO)$

$$\int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu_y} ds_y = \int\limits_{\Omega} \Delta u(x) dx$$

St 5. *(1-ая формула Грина)*
$u \in C^2(\overline{\Omega}), v \in C^1(\overline{\Omega})$, $\Omega \in (GO)$ *тогда*

$$\int\limits_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu_y} ds_y = \int\limits_{\Omega} v(x) \Delta u(x) dx + \int\limits_{\Omega} (\nabla v, \nabla u) dx$$

St 6. *(2-ая формула Грина)*
$u, v \in C^2(\overline{\Omega})$, $\Omega \in (GO)$*тогда*

$$\int\limits_{\partial\Omega} \left[v \frac{\partial u}{\partial \nu_y} - u \frac{\partial v}{\partial \nu_y} \right] ds_y = \int\limits_{\Omega} (v \Delta u - u \Delta v) dx$$

2.2 Применение формул в теории гармонических функций

Th 10. *(Единственность решения задачи Дирихле)*
$u \in C^2(\overline{\Omega})$, $\Omega \in (GO)$ *и* $u|_{\partial\Omega} = 0$, $\Delta u = 0$ *всюду в* Ω, *тогда* $u(x) = 0 \forall x \in \overline{\Omega}$

Задача Неймана:
$u \in C^2(\overline{\Omega}), \phi \in C(\partial\Omega)$

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, x \in \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu_y}|_{\partial\Omega} = \phi \end{cases}$$

Th 11. *(Необходимое условие разрешимости задачи Неймана)*
$\Omega \in (GO)$, $u \in C^2(\overline{\Omega})$ *и* $\int\limits_{\partial\Omega} \phi(y) dy = 0$. *(в классе* $C^2(\overline{\Omega})$*)*

Th 12. *(Неединственность решения)*
Пусть $u_1, u_2 \in C^2(\overline{\Omega})$, $\Omega \in (GO)$, u_1, u_2 *- решения задачи Неймана с* $\phi(x)$, *тогда* $u_2 = C + u_1, \forall x \in \overline{\Omega}, C = const$

2.3 Сферически симметричный случай

ω_n - площадь единичной n-мерной сферы
$\omega_n r^{n-1}$ - площадь n-мерной сферы радиуса r>0
$\beta_n = \omega_n \dfrac{R^n}{n}$ - объём n-мерного шара радиуса R>0
Вид оператора Лапласа в симметричных координатах $\mathbb{R}^n$

$$\Delta u = \frac{1}{r^{n-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{n-1} \frac{\partial f}{\partial r} \right),\ \forall u = f(r)$$

Def 12. Фундаментальным решением уравнения Лапласа в $\mathbb{R}^n$ называется функция:

$$E(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{1}{2\pi} \ln |x|, & \text{if } n = 2, \forall x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \\ \dfrac{-1}{\omega_n (n-2)|x|^{n-2}}, & \text{if} n \geq 3, \forall x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \end{array} \right\}$$

Лемма 4. *(Свойства фундаментального решения)*

1. $\Delta E = 0, \forall x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$
2. $\dfrac{\partial E}{\partial r} = \dfrac{1}{\omega_n r^{n-1}}$
3. $E(x) \to 0, x \to \infty, n \geq 3$
4. $E(x) \to -\infty, x \to 0+0$, *но* $|x|^{n-1} E(x) \to 0, x \to 0+0$

Закон обратных квадратов: $gradE(x) = \dfrac{1}{4\pi |x|^2} \dfrac{\overline{x}}{|x|}$

Связь с Ньютоновским потенциалом: $\dfrac{-1}{4\pi} E_N = E(x)$, $E_N(x) = \dfrac{1}{|x|}$

2.4 Фундаментальная формула Грина

Th 13. *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *- ограниченная область и* $\Omega \in (GO)$. $u \in C^2(\overline{\Omega})$, $E(x-y)$ *- фундаментальное решение, тогда* $\forall x \in \Omega$

$$u(x) = \int\limits_{\Omega} E(x-y) \Delta u(y) dy + \int\limits_{\partial\Omega} \left[\frac{\partial E(x-y)}{\partial \nu_y} u(y) - \frac{\partial u}{\partial \nu_y} E(x-y) \right] ds_y$$

Следствие 6. *Пусть* $u \in C^2(\overline{\Omega})$ *и* $\Delta u = 0$ *всюду в* Ω, *тогда* $\forall x \in \Omega$*:*

$$u(x) = \int\limits_{\partial\Omega} \left[\frac{\partial E(x-y)}{\partial \nu_y} u(y) - \frac{\partial u}{\partial \nu_y} E(x-y) \right] ds_y$$

Следствие 7. *(Бесконечная дифференцируемость)*
Пусть Ω_0 - произвольная область в $\mathbb{R}^n$, $u \in C^2(\overline{\Omega_0})$, $\Delta u = 0$ в Ω_0, тогда u - бесконечно дифференцируема в Ω_0.

Следствие 8. *Значение гармонической фукнции u в точке $x \in \Omega$ совпадает со средним значением u на любой сфере, с центром в x:*

$$u(x) = \frac{1}{\omega r^{n-1}} \int\limits_{|x-y|=r} u(y)dy$$

Следствие 9. *Значение гармонической фукнции u в точке $x \in \Omega$ совпадает со средним значением u на любом шаре, с центром в x:*

$$u(x) = \frac{1}{\beta_n R^n} \int\limits_{|y-x|\le R} u(y)dy$$

2.5 Функция Грина

Положим $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ограниченная область и $\Omega \in (GO)$

Def 13. Функция Грина: $G(x,y) = E(x-y) + g(x,y), \forall x,y \in \Omega,\ x \neq y$ с свойствами:

1. $g(\dot{=}, y) \in C^2(\overline{\Omega})$ и $\Delta_x g(x,y) = 0$ всюду в Ω $\forall y \in \Omega$ - фиксированный
2. $G(x,y)|_{x\in\partial\Omega} = 0$
3. $n \geq 3$ $|G(x,y)| \to 0, x \to \infty$, $n = 2, G(x,y) \leq M = const, x \to \infty$

Th 14. *(Симметричность функции Грина)*
Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ - область и $\Omega \in (GO)$ и для неё существует функция Грина $G(x,y)$, тогда $G(x,y) = G(y,x), \forall x,y \in \Omega, x \neq y$

2.6 Применение функции Грина в задаче Пуассона

Задача для уравнения Пуассона:

$$\begin{cases} \Delta u(x) = f(x), x \in \Omega \\ u(x)|_{x\in\partial\Omega} = \phi(x) \end{cases}$$

$f(x) \in C(\overline{\Omega}), \phi(x) \in C(\partial\Omega), u \in C^2(\overline{\Omega})$

Th 15. *Пусть $\Omega \in \mathbb{R}^n$ - ограниченная область и $\Omega \in (GO)$. Пусть $u \in C^2(\overline{\Omega})$ является решением задача Дирихле, тогда справедлива разрешающая формула:*

$$u(x) = \int\limits_{\Omega} f(y)G(x,y)dy + \int\limits_{\partial\Omega} \phi(y)\frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu_y} ds_y,$$

где $G(x,y)$ - формула Грина для области Ω

3 Уравнение колебаний струны

Уравнение колебания струны

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t),\ a^2 = \frac{T}{\rho},\ f(x,t) = \frac{F(x,t)}{\rho},\ 0 \le x \le l, 0 < t$$

Типовые граничные условия:

1. Закреплённый край $u(0,t) = 0$
2. Свободный край $u_x(0,t) = 0$ Обоснование: $-Tu_x(0,t) = 0$
3. Упругое закрепление:

$$\begin{cases} u_x(0,t) - hu(0,t) = 0 \\ u_x(l,t) + hu(l,t) = 0, h = \dfrac{K}{T} \end{cases}$$

Модельная задача о колебаниях струны с закреплёнными краями

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{tt} = a^2 u_{xx},\ 0 \le x \le l, t > 0 \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 \\ u(x,0) = \phi(x), u_t(x,0) = \psi(x) \end{array} \right.$$

Решение методом Фурье:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos \frac{\pi k a}{l} t + B_k \sin \frac{\pi k a}{l} t) \sin \frac{\pi k}{l} x, A_k = \frac{2}{l} \int\limits_0^l \phi(s) \sin \frac{\pi k}{l} s ds, B_k = \frac{2}{\pi k a} \int\limits_0^l \psi(s) \sin \frac{\pi k}{l} s ds$$

Th 16. *Пусть* $\phi \in C^3[0,l], \psi \in C^2[0,l]$*, причём*

1. $\phi(0) = \phi(l) = 0, \phi''(0) = \phi''(l) = 0$

2. $\psi(0) = \psi(l) = 0$

Тогда $u \in C^{2,2}([0,l] \times [0,+\infty))$ *и функция u(x,t) удовлетворяет всем условиям задачи выше.*

3.1 Канонические координаты

$$\begin{cases} \xi = t - ax \\ \eta = t + ax \end{cases}$$

Тогда уравнение $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ в канонических координатах примет вид $u_{\xi\eta} = 0$

Общее решение уравнения колебаний представляется в следующем виде

$u(x,t) = f(x-at) + g(x+at)$, где $f, g \in C^2$ - некоторые функции одного аргумена.
Семейство прямых на плоскости (x,t)

$$\left[\begin{array}{l} x - at = C_1, C_1 \in \mathbb{R} \\ x + at = C_2, C_2 \in \mathbb{R} \end{array}\right.$$

это характеристики уравнения (1) (однородное уравнение колебаний струны).

Th 17. *Всякое решение $u(x,t)$ задачи (1) представимо в виде суммы прямой и обратной волны. (т.к. $g(x+at)$ - обратная волна, $f(x-at)$ - прямая волна).*

3.2 Задача Коши для уравнения колебания струны

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \ x \in \mathbb{R}, t \geq 0 \\ u(x,0) = \phi(x), u_t(x,0) = \psi(x) \end{cases}$$

Формулы Даламбера(решение для задачи Коши)

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\phi(x+at) - \phi(x-at)\right) + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \phi(s)ds$$

Th 18. *Пусть $\phi \in C^2(\mathbb{R})$, $\psi \in C^1(\mathbb{R})$ и $u = u(x,t)$ определяется формулой Даламбера $\Rightarrow$ $u \in C^{2,2}(\mathbb{R} \times [0, +\infty])$ и фукнция и является классическим решением задачи Коши.*

Th 19. *Устойчивость ???????*

3.3 Неоднородное уравнение колебаний струны

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), \ x \in \mathbb{R}, t \geq 0 \\ u(x,0) = 0, u_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

Def 14. Вспомогательная функция $v(x,t;\alpha)$ такая что:

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2 v_{xx}, x \in \mathbb{R}, t \geq \alpha \\ v|_{t=\alpha} = 0, v_t|_{t=\alpha} = f(x,\alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_{tt}(x,t;\alpha) = a^2 v_{xx}(x,t;\alpha), x \in \mathbb{R}, t \geq \alpha \\ v(x,\alpha;\alpha) = 0, v_t(x,\alpha;\alpha) = 0 \end{cases}$$

Def 15. Интеграл Дюамеля от функции $v(x,t;\alpha)$:

$$u(x,t) = \int\limits_0^t v(x,t;\alpha)d\alpha$$

Th 20. *Пусть* $f, f'_x \in C(\mathbb{R} \times [0, +\infty)$ $\Rightarrow$ *интеграл Дюамеля дает классическое решение неоднородной задачи Коши:*

$$u(x,t) = \int\limits_0^t v(x,t;\alpha)d\alpha = \frac{1}{2a}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(s,\tau)ds$$